КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
Кафедра прикладної статистики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана
з навчальної роботи

______________Кашпур О. Ф.
«___»____________202__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
Теорія ймовірностей та математична статистика

для студентів

галузь знань	**12 «Інформаційні технології»**
спеціальність	**124 «Системний аналіз та наука про дані»**
освітній рівень	**бакалавр**
освітня програма	**«Системний аналіз»**
вид дисципліни	**обов'язкова**

Форма навчання	**денна**
Навчальний рік	**2025/2026**
Семестр	**4,5**
Кількість кредитів ECTS	**11**
Мова викладання, навчання та оцінювання	**українська**
Форма заключного контролю	залік, іспит

Викладачі: **к.ф.-м.н, доц. Лівінська Г.В.**

Пролонговано: на 20__/20__ н.р. _______(________) «__»____20__р.

на 20__/20__ н.р. _______(________) «__»____20__р.

КИЇВ – 2025

Розробник: Лівінська Ганна Володимирівна, канд. фіз.-мат. н., доцент, доцент кафедри прикладної статистики

ЗАТВЕРДЖЕНО
Завідувач кафедри прикладної статистики

____________________ (Ірина РОЗОРА)

Протокол №___від «___»__________ 202__ р.

Схвалено Гарантом освітньо-професійної програми «Системний аналіз»

____________________ к.ф.-м. н., доцент Михайло ШАРАПОВ
(підпис)

«___» ____________ 202__ року

Схвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Протокол №____ від «___» ___________ 202__ року

Голова науково-методичної комісії

____________________ к.ф.-м. н., доцент Тетяна КАРНАУХ
(підпис)

«_____» _____________ 202__ року

1. **Мета дисципліни** – одержання студентами базових знань про ймовірнісні закони, базові методи математичної статистики, вмінь працювати з основними ймовірнісними та статистичними моделями, навичок застосування отриманих знань до практичних задач, які потребують ймовірносно-статистичного аналізу.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни
Знати: основи поняття та методи математичного аналізу, алгебри, теорії множин, комбінаторики.
Вміти: застосовувати методи математичного аналізу, алгебри, теорії множин, комбінаторики.
Володіти елементарними навичками: розв'язувати задачі з базових дисциплін.

Для доступу до дисципліни «Теорій ймовірностей та математична статистика» освітньо-професійної програми «Системний аналіз» студент повинен опанувати знання та результати навчання, які надають дисципліни «Математичний аналіз», «Алгебра», «Дискретна математика». Дисципліна «Теорій ймовірностей та математична статистика» є базовою для засвоєння дисциплін «Аналіз даних», «Математична демографія та моделювання випадкових процесів», «Актуарна математика», «Математичні моделі страхування та асиметрична криптографія», «Теорія масового обслуговування».

3 Анотація навчальної дисципліни

Навчальна дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології» зі спеціальності 124 «Системний аналіз», освітньо-професійної програми «Системний аналіз». Дана дисципліна є обов'язковою навчальною дисципліною за програмою «Системний аналіз». Викладається у 4 та 5 семестрах в обсязі – 330 годин. (11 кредитів ECTS) зокрема: лекції – 74 год., практичних – 74 год., консультації – 8 год., самостійна робота – 174 год. У курсі передбачено 4 змістовних частини та 4 контрольні роботи. Завершується дисципліна – заліком в 4 семестрі та іспитом в 5 семестрі

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати: основні формули, моделі, поняття і задачі математичної статистики, основні визначення, формули (зокрема формули повної ймовірності та Байєса) , леми, теореми, моделі, поняття та положення дисципліни, основні характеристики випадкових величин та їхні властивості, основні властивості моделей ланцюгів Маркова з дискретним та неперервним часом.

вміти: будувати точкові та інтервальні оцінки і досліджувати їх властивості, перевіряти основні статистичні гіпотези, проводити розрахунки в рамках скінченої та зліченої ймовірносних схем та в умовах моделі геометричної ймовірності; обчислювати ймовірності простих та комбінованих подій, будувати та досліджувати розподіли ймовірностей дискретних, неперервних, сингулярних та змішаних випадкових величин, перевіряти залежність та незалежність подій та випадкових величин.

4 Завдання (навчальні цілі)

набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) відповідно до освітньої кваліфікації бакалавра з системного аналізу. Зокрема, розвивати:

- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності;
- здатність генерувати нові ідеї;

- здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт;
- здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних моделей, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів;
- здатність організовувати роботу з аналізу та проектування складних систем, створення відповідних інформаційних технологій та програмного забезпечення;
- здатність системно аналізувати свою професійну і соціальну діяльність, оцінювати накопичений досвід.

5 Результати навчання за дисципліною

<table>
<tr><th colspan="2">Результат навчання (РН)
(1 – знати; 2 – вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)</th><th rowspan="2">Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання</th><th rowspan="2">Методи оцінювання</th><th rowspan="2">Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни</th></tr>
<tr><th></th><th>Результат навчання</th></tr>
<tr><td>РН1.1</td><td>Знати і розуміти основні визначення, формули (зокрема, формули повної ймовірності та Баєса), леми, теореми, моделі, поняття (зокрема поняття незалежності подій та умовної ймовірності) та положення дисципліни (зокрема, аксіоматику теорії ймовірностей), основні характеристики випадкових величин та їхні властивості; основні властивості моделей ланцюгів Маркова з дискретним та неперервним часом</td><td rowspan="3">Лекції, практичні заняття</td><td>Контрольні роботи 1 та 2, поточне оцінювання</td><td rowspan="3">45%</td></tr>
<tr><td>РН1.2</td><td>Знати і розуміти основні формули, моделі, поняття і задачі математичної статистики</td><td>Контрольні роботи 3 та 4, іспит</td></tr>
<tr><td>РН2.1</td><td>Вміти проводити розрахунки в рамках скінченної та зліченної ймовірносних схем та в умовах моделі геометричної ймовірності; будувати та досліджувати розподіли ймовірностей дискретних, неперервних, сингулярних та змішаних випадкових величин; перевіряти залежність та незалежність подій та випадкових величин.</td><td>Контрольні роботи 1 та 2 поточне оцінювання,</td></tr>
<tr><td>РН2.2</td><td>Вміти будувати точкові та інтервальні оцінки і досліджувати їх на незміщеність, ефективність та консистентність; перевіряти основні статистичні гіпотези</td><td>Лекції, практичні заняття</td><td>Контрольні роботи 3 та 4, іспит</td><td>40%</td></tr>
<tr><td>РН3.1</td><td>Демонструвати навички взаємодії з іншими людьми, уміння працювати в</td><td>Самостійна робота,</td><td>Поточне оцінювання</td><td>5%</td></tr>
</table>

	командах	практичні заняття		
РН3.2	*Обґрунтовувати власний погляд на задачу, демонструвати навички взаємодії в спілкуванні та обміну інформацією для досягнення певного результату, уміння працювати в командах.*	Практичні заняття	Поточне оцінювання, іспит	5%
РН4.1	*Організовувати свою самостійну роботу для досягнення результату*			5%
РН4.2	*Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їхню якість.*			

6 Співвідношення результатів навчання дисципліни з програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни / Програмні результати навчання	РН1.1	РН1.2	РН2.1	РН2.2	РН 3.1	РН 3.2	РН 4.1	РН 4.2
(з опису освітньої програми)								
ПР01. Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу.	+	+						
ПР03. Вміти визначати ймовірнісні розподіли стохастичних показників та факторів, що впливають на характеристики досліджуваних процесів, досліджувати властивості та знаходити характеристики багатовимірних випадкових векторів та використовувати їх для розв'язання прикладних задач, формалізувати стохастичні показники та фактори у вигляді випадкових величин, векторів, процесів			+	+				
ПР06. Знати та вміти застосовувати основні методи постановки та вирішення задач системного аналізу в умовах невизначеності цілей, зовнішніх умов та конфліктів.		+	+					
ПР09. Вміти створювати ефективні алгоритми для обчислювальних задач системного аналізу та систем підтримки прийняття рішень.			+	+			+	+
ПР14. Розуміти і застосовувати на практиці методи статистичного моделювання і прогнозування, оцінювати вихідні дані.				+	+	+		
ПРН 15 Розуміти українську та іноземну мови на рівні, достатньому для обробки фахових інформаційно-літературних джерел, професійного усного і письмового спілкування, написання текстів за фаховою тематикою.						+	+	

7 Схема формування оцінки

7.1 Форми оцінювання студентів:

- семестрове оцінювання:

1. Контрольна робота 1: *РН 1.1, РН 2.1 - 35 балів/15 балів.*
2. Контрольна робота 2: *РН 1.1, РН 2.1 - 35 балів/15 балів.*
3. Контрольна робота 3: *РН1.1, РН2.1 – 25 балів/15балів.*
4. Контрольна робота 4: *РН1.2, РН2.2 – 25 балів/15балів.*
5. Поточне оцінювання: *РН1.1, РН2.1, РН3.1 – 40 балів/24 бали.*

- **підсумкове оцінювання у 4 семестрі (у формі заліку):** залік виставляється за результатами роботи студента уздовж всього семестру і не передбачає додаткових заходів оцінювання для успішних студентів.

- підсумкове оцінювання у 5 семестрі (у формі іспиту):

- максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: *40 балів;*
- результати навчання, які оцінюються: *РН 1.2, РН 2.2, РН 3.2, РН 4.1, РН 4.2.*
- форма проведення: *письмова робота.*
- види завдань: два теоретичні питання, три задачі по 20% від максимальної кількості балів кожне завдання.
- для отримання загальної позитивної оцінки з дисципліни оцінка за іспит повинна бути не меншою ніж 24 бали;
- студент не допускається до іспит, якщо протягом семестру він набрав менше ніж 36 балів.

Неформальна освіта. Замість самостійної роботи студенту можуть бути зараховані результати неформальної освіти, якщо вона здобута протягом поточного семестру, її тематика та обсяг відповідають дисципліні "Теорія ймовірностей та математична статистика" та погоджені попередньо з викладачем.

Запитання для підготовки до іспиту у 5 семестрі

1. Стохастичний експеримент. Масове явище. Елементарна подія, простір елементарних подій. Подія, іменовані події. Основні операції над подіями, їхні множинні відповідники, демонстрація діаграмами Ейлера-Вєнна та таблицями істинності.
2. Абсолютні та відносні частоти подій, їхні основні характеристики. Статистичне визначення ймовірності.
3. Скінченна ймовірносна схема (СЙС). Поняття події та її ймовірності в СЙС. Кількість різних можливих подій в СЙС. Властивості ймовірності в рамках СЙС. Класичне визначення ймовірності.
4. Комбінаторне правило добутку – основне правило комбінаторики. Комбінаторне правило суми. Сполуки, перестановки, розміщення, перестановки з повтореннями, сполуки з повтореннями.
5. Зліченна ймовірносна схема (ЗЙС). Поняття події та її ймовірності в ЗЙС. Властивості ймовірності в рамках ЗЙС.
6. Геометричне визначення ймовірності. Демонстрація відмінності між поняттями неможливої події та події нульової ймовірності.
7. Алгебра, сігма-алгебра, загальне визначення події та її ймовірності, аксіоматика теорії ймовірностей та основні наслідки з аксіом. Ймовірносний простір.
8. Умовна ймовірність. Теорема добутку (частковий та загальний варіант). Основне та еквівалентне визначення незалежних подій. Незалежність в сукупності та попарна незалежність подій. Властивості незалежних подій.

9. Повні групи подій, попарна несумісність подій. Теорема (формула) повної ймовірності. Задача про розорення.
10. Апріорні та апостеріорні ймовірності. Формула Байєса.
11. Дискретна випадкова величина (в.в.) та розбиття, що нею породжується. Індикатор. Представлення в.в. у вигляді лінійної комбінації індикаторів.
12. Схема незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ), основні формули.
13. Теорема Пуассона в СНВБ,– закон рідких подій. Приклади застосування.
14. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Приклади застосування.
15. Дискретні одновимірні закони розподілу в.в. Приклади основних дискретних розподілів. Вибірковий ймовірносний простір.
16. Сумовна в.в., її математичне сподівання (м.с.) та його властивості.
17. Моменти в.в., дисперсія та її властивості.
18. Дискретні багатовимірні закони розподілу. Випадковий вектор (в.вк.). Двовимірна дискретна в.в.
19. Незалежні дискретні в.в. – два визначення (основне та еквівалентна) та доведення їхньої еквівалентності. Теорема про спадковість незалежності.
20. Властивості м.с. та дисперсій для незалежних в.в.
21. Коваріація та кореляція випадкових величин. Їхні властивості.
22. Генератриса та факторіальні моменти цілочисельної в.в. (ц.в.в.). Приклади. Теорема про генератрису суми незалежних доданків.
23. Багатовимірні генератриси та змішані факторіальні моменти цілочисельних в.вк. Теорема про випадкову суму випадкового числа в.в.
24. Гіллястий процес (г.п.). Критичні, докритичні та надкритичні г.п. Виродження г.п. та її ймовірність.
25. Критерій надкритичності г.п.
26. Слабка збіжність ц.в.в. та її критерій. Доведення теореми Пуассона на базі критерію слабкої збіжності.
27. Визначення в.в. як вимірного відображення. Функція розподілу (ф.р.) в.в., її властивості та наслідки цих властивостей. Теорема про характеристичні властивості ф.р.
28. Борелівська сігма-алгебра, вимірність в.в., розподіл ймовірностей в.в. Теорема Каратеодорі. Зв'язок між розподілом ймовірностей в.в. та її ф.р. Вибірковий ймовірносний простір.
29. Лема про число точок розриву першого роду довільної ф.р. Дискретні розподіли.
30. Абсолютно неперервні розподіли. Щільність, її властивості. Приклади основних абсолютно неперервних розподілів.
31. Визначення та приклад сингулярного розподілу. Загальний розклад довільної ф.р.
32. Функції від випадкових величин, теорема та приклади.
33. В.вк., його ф.р. та щільність. Незалежні в.в. (основне та еквівалентне визначення). Властивості незалежних в.в.
34. Щільність суми двох незалежних в.в. Приклад (трикутний розподіл).
35. Проста невід'ємна в.в. та її м.с. Елементарні властивості м.с.
36. Невід'ємна в.в., її м.с.
37. Загальне визначення м.с.в.в. Властивості м.с.в.в.
38. Мультиплікативна властивість м.с.

39. М.с. як інтеграл Лебєга. Збіжність майже всюди. Теорема Лебєга.
40. Формули для обчислення м.с. Інтеграл Лебєга-Стілт'єса.
41. Ланцюг Маркова (ЛМ), марківська властивість, однорідний ЛМ, матриця перехідних ймовірностей. Стохастична матриця. Приклади.
42. Рівність Маркова–Колмогорова–Чепмена. РМКЧ в матричному вигляді та наслідок з неї.
43. Розподіл ймовірностей ЛМ.
44. Класифікація станів ЛМ.
45. Критерій рекурентності.
46. Теорема солідарності. Приклади її застосування.
47. Критерій рекурентності тривіального блукання на Z1.
48. Теорема про розклад множини станів періодичного ЛМ.
49. Граничний, ергодичний та стаціонарний розподіли ЛМ.
50. Ергодичні теореми.
51. ЛМ з неперервним часом (ЛМнч). Однорідні ЛМнч, властивості перехідних ймовірностей. Траєкторії ЛМнч.
52. Стохастично неперервні ЛМнч та теорема про їх інфінітезимальні характеристики. Властивості інфінітезимальних характеристик.
53. Вкладені ЛМ. Перша та друга системи рівнянь Колмогорова (ПСРК та ДСРК) та їхній матричний вид. Системи для безумовних та стаціонарних ймовірностей.
54. Ергодична теорема для ЛМнч.
55. Процеси гибелі та народження (ПГтН). Інфінітезимальна матриця ПГтН та відповідні ПСРК та ДСРК.
56. Система рівнянь для безумовних ймовірностей ПГтН. Стаціонарний розподіл для ПГтН.
57. Системи масового обслуговування типу $M \mid M \mid 1$.
58. Системи масового обслуговування типу $M \mid M \mid \infty$.
59. Характеристична функцій (х.ф.) – визначення та основні формули і властивості. Х.ф. основних розподілів.
60. Формули обернення та теорема єдиності для х.ф. Приклади стійких розподілів.
61. Симетричні розподіли.
62. Закон великих чисел у формі Чебишова.
63. Закон великих чисел для незалежних однаково розподілених випадкових величин.
64. Закон великих чисел у формі Хінчина.
65. Теорема Бернуллі (ЗВЧ для числа успіхів в СНВБ).
66. Закон великих чисел у формі теореми Маркова.
67. Теорема Пуассона (узагальнення теореми Бернуллі). Необхідна і достатня умова виконання закону великих чисел.
68. Приклади виконання та невиконання закону великих чисел.
69. Найпростіший варіант ЦГТ (центральна гранична теорема для незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають скінченне математичне сподівання).
70. Приклади застосування ЦГТ.
71. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа як наслідок із ЦГТ.
72. Умова Ліндеберга, сенс умови Ліндеберга. ЦГТ за умови Ліндеберга.
73. Умова Ляпунова. ЦГТ за умов Ляпунова.
74. Приклади виконання та невиконання центрального граничного твердження.

75. Багатовимірна функція розподілу. Випадковий вектор. Формула підрахунку ймовірності для випадкового вектора потрапити в прямокутник.
76. Властивості багатовимірної функції розподілу. Приклад багатовимірної ф.р.
77. n-мірні розподіли. Зв'язок між розподілом ймовірностей та функцією розподілу.
78. Дискретні n-мірні розподіли (Приклади).
79. Абсолютно неперервні багатовимірні розподіли (Приклади). Властивості щільності.
80. Три основні теореми про багатовимірний гауссівський розподіл (одну – із доведенням).
81. Двомірна гауссівська щільність як частковий випадок багатовимірного (загального) випадку.
82. Багатовимірні характеристичні функції, їхні властивості.
83. Приклади багатовимірних характеристичних функцій.
84. Математична статистика. Основні задачі математичної статистики (ОЗМС) на прикладі схеми незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ).
85. Вибірковий метод, незалежна вибірка, варіаційний ряд.
86. Емпіричний розподіл. Вибіркова функція розподілу (теорема, приклади).
87. Вибіркові та невибіркові моменти. Описова статистика.
88. Діаграми, гістограми та полігони частот (Приклади). Групована вибірка.
89. Граничні теореми для емпіричної функції розподілу (без доведення).
90. Параметричне оцінювання. Статистика. Приклади.
91. Незміщені та асимптотично незміщені оцінки. Приклади (вибіркове середнє та вибіркова дисперсія).
92. Поняття параметричної функції. Приклад відсутності незміщеної оцінки параметричної функції.
93. Оптимальні оцінки. Приклад.
94. Слушні оцінки. Приклад. Достатня умова слушності.
95. Функція вірогідності, функція вкладу (їхні властивості). Регулярна модель.
96. Функція інформації Фішера (основна та альтернативна формули обчислення). Приклади.
97. Нерівність Крамера-Рао. Ефективні та асимптотично ефективні оцінки.
98. Методи знаходження оцінок: метод моментів. Приклади. Властивості ОММ.
99. Методи знаходження оцінок: метод максимальної вірогідності. Приклади. Властивості ОММВ.
100. Поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.
101. Метод центральної статистики побудови довірчого інтервалу: алгоритм, приклади.
102. Метод центральної статистики побудови довірчого інтервалу: "універсальні" центральні статистики.
103. Довірчі інтервали для параметрів гауссівського розподілу (хоча б один – з повним доведенням).
104. Метод точкової оцінки побудови довірчого інтервалу (алгоритми для абсолютно неперервної та дискретної моделі). Приклад.
105. Асимптотичні довірчі інтервали.
106. Статистична гіпотеза, статистичний критерій. Основні типи непараметричних гіпотез, приклади. Прості та складні гіпотези.
107. Критерій згоди, критеріальна статистика, критична область, функція потужності критерію. Незміщеність критерію.

108.Критерій Колмогорова перевірки гіпотези про вид розподілу, критеріальна статистика та її властивості.
109.Критерій Пірсона хі-квадрат перевірки гіпотези про вид розподілу, критеріальна статистика, приклад.
110.Критерій однорідності Смірнова.
111.Критерій однорідності хі-квадрат.
112.Критерій незалежності хі-квадрат, таблиця спряженості двох ознак.
113.Перевірка гіпотези про випадковість.
114. Параметричні гіпотези (прості, складні), довірча та критична область, помилки першого та другого роду. Приклади.
115.Критерій Неймана-Пірсона вибору із двох простих параметричних гіпотез.
116.Метод відношення вірогідностей вибору із двох складних параметричних гіпотез

Завдання контрольної роботи № 1

Задача 1 Знайти ймовірність того, що при киданні трьох гральних кубиків шістка випаде на одному з них, якщо всі три значення різні.

Задача 2 З колоди у 52 карти витягають навмання відразу 3 карти. Описати множину елементарних подій Ω. Знайти ймовірність події A=(витягнуті карти будуть 3, 7 та туз).

Задача 3 5% чоловіків та 0,25% жінок – дальтоніки. Навмання обрана людина виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це був чоловік, якщо вважати, що чоловіків та жінок однакова кількість?

Задача 4 Автомат випускає гвіздки, причому ймовірність появи бракованого гвіздка складає 0,1%. Яка ймовірність того, що серед 1000 гвіздків буде не більше двох бракованих?

Задача 5 Маємо рівняння $x^2 + ax + b = 0$, де a та b довільно (рівно можливо) обираються з відрізка [0 , 1]. Знайти ймовірність того, що це рівняння має дійсні корені.

Задача 6 В коробці 4 червоних та 3 зелених олівці. Із коробки навмання дістають 3 олівці. Нехай X – випадкова величина, що дорівнює кількості витягнутих червоних олівців. Знайти розподіл випадкової величини X та ймовірності таких подій: $A = \{ X \geq 2 \}$, $B = \{ X \leq 1 \}$. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X.

Задача 7 Із ящика, в якому 2 білих та 4 чорних кулі, виймають 3 кулі і перекладають в інший ящик, де вже було 5 білих куль. Потім з другого ящика перекладають 4 кулі знову до першого ящика. Знайти математичне сподівання числа білих куль x_1 та x_2 в обох ящиках.

Завдання контрольної роботи № 2

Задача 1 Випадкова величина X розподілена за законом арксинуса, тобто її щільність

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a \end{cases}$$

Знайти F(x), MX та DX.

Задача 2 Точку кинуто всередину круга радіуса r. ξ - відстань від точки до центра кола. Знайти $F_\xi(x)$, $f_\xi(x)$, $D\xi$ та $M\xi$.
Задача 3 Випадкова величина X має щільність, що є центрованим напівеліпсом з піввісями *a* і *b* (*a* - відоме, *b* - ні). Знайти *b*, m=MX, DX, F(x) та побудувати графік F(x).
Задача 4 $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp\{-x^{-a}\}, & x > 0 \end{cases}$ (*a*>0). Знайти $F_\eta(y)$, де $\eta = -1/\xi$.
Задача 5 Випадковий вектор (*x*, *y*) має нормальний розподіл з E*x* = E*y* = 0, $Ex^2 = Ey^2 = \sigma^2$, E*xy* = 0. Знайти P{*x*<*y*} та P{*x*>0 , *y*>0}.
Задача 6 В продукції заводу браку через дефект А складає 3%, а через дефект В – 4,5%. Небракованої продукції 95%. Знайти коефіцієнт кореляції дефектів А та В.
Задача 7 Випадкові величини ξ та η незалежні, $M|\eta|<\infty$, $M|\xi|<\infty$. Довести, що $M|\xi\eta|<\infty$ і $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Завдання контрольної роботи № 3

Задача 1 Випадковий процес x(t) має вид x(t) = Vt + b, де $V \sim N(m_v, \sigma_v^2)$, $b \in R$. Знайти:

а) щільність *f*(x,t) випадкового процесу x(t); б) математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсію $D_x(t)$ випадкового процесу x(t); в) кореляційну функцію $K_x(t, t')$ випадкового процесу x(t).

Задача 2 $x(t) = y \cdot \exp\{-t^2\}$, My = 2, Dy = 0,01. Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Задача 3 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених ($P\{\xi_i = \pm 1\} = ½$) випадкових величин. Розглядається нова послідовність випадкових величин $\eta_n = ½\ (\xi_n + \xi_{n+1})$. Знайти $p_{jk}(m, n) = P\{\ \eta_n = k \mid \eta_m = j\ \}$. Довести, що $\{\eta_n \mid\ n \ge 1\}$ не є ланцюгом Маркова.

Задача 4 Послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ є ланцюгом Маркова з множиною станів E = {1, 2, 3} та матрицею ймовірностей переходів за один крок $P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ $(0<\alpha<1)$.

Будується нова послідовність випадкових величин $\eta_n = \begin{cases} 1, & якщо\ \xi_n = 1\ чи\ 2 \\ 2, & якщо\ \xi_n = 3 \end{cases}$.

Довести, що послідовність $\{\eta_0, \eta_1, \ldots\}$ є ланцюгом Маркова та знайти матрицю ймовірностей переходів за один крок.

Задача 5 ξ_t – пуассонівський випадковий процес з параметром λ, тобто $\xi_0=0$, а $\forall$ $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ випадкові величини $(\xi_{t_1} - \xi_{t_0})$, $(\xi_{t_2} - \xi_{t_1})$, …, $(\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}})$ незалежні і кожен приріст $(\xi_t - \xi_s)$ (для $0 \le s \le t$) має розподіл Пуассона з параметром $\lambda(t-s)$, тобто

$$P\{\xi_t - \xi_s = i\} = \frac{(\lambda(t-s))^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

Довести, що пуассонівський процес є марківським. Знайти перехідні ймовірності.

Задача 6 За інфінітезимальною матрицею $A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$ знайти матрицю ймовірностей переходів $\Pi(t) = \|p_{ij}(t)\|$.

Задача 7 Середній час безвідмовної роботи ЕОМ є $\frac{1}{\lambda}$ (тобто, потік "відмов у роботі" є потік з параметром λ). Середній час ремонту ЕОМ є $\frac{1}{\mu}$ (тобто, потік ремонтних робіт має параметр μ). Знайти ймовірність того, що в момент t машина буде працювати, якщо на початку вона працювала.

Задача 8 Середній час між заявками СМО – 0,5с. Яка ймовірність того, що за 1с прийде 2 заявки?

Завдання контрольної роботи № 4

Задача 1 Довести, що у ергодичного марківського ланцюга всі стани поворотні.

Задача 2 Довести, що випадковий процес з незалежними приростами є марківським.

Задача 3 $\hat{\theta}_n = \overline{m} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – оцінка для середнього m у генеральній сукупності із скінченою дисперсією σ^2. Довести: а) $\overline{m}$ консистентна оцінка, б) $\overline{m}$ незміщена оцінка.

Задача 4 (X_1, … , X_n) – незалежна вибірка з генеральної сукупності із скінченим математичним сподіванням m та невідомою дисперсією σ^2. а) Довести, що вибіркова дисперсія $\hat{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ є зміщеною оцінкою для невідомої дисперсії; б) знайти зсув цієї оцінки; в) показати, що $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ є незміщеною оцінкою для невідомої дисперсії.

Задача 5 Знайти оцінки

а) методом моментів,

б) методом максимальної вірогідності

для параметрів гауссівського розподілу.

Задача 6 Знайти оцінки

а) методом моментів,

б) методом максимальної вірогідності

для параметрів експоненціального розподілу.

Задача 7 Для перевірки твердження виробника про те, що генератор за зміну споживає у середньому 20 літрів пального, провели 10 випробувань: за 10 змін споживання генератора склали: 19.1, 18.6, 19.1, 18.1, 16.6, 20.1, 19.8, 21.1, 24.4, 21.6. Перевірити твердження виробника при рівні значущості 0.05.

Задача 8 Монету підкинули 100 раз і при цьому 67 раз випав герб. Перевірити гіпотезу про те, що монета симетрична (при рівні значимості 5%).

7.2 Організація оцінювання

Терміни проведення форм оцінювання:

1. Контрольна робота 1: *до 9 тижня 4-го семестру навчання.*
2. Контрольна робота 2: *до 19 тижня 4-го семестру навчання.*
3. Контрольна робота 3: *до 6 тижня 5-го семестру навчання.*
4. Контрольна робота 4: *до 13 тижня 5-го семестру навчання.*
5. Поточне оцінювання: *протягом семестрів.*

Контрольні роботи: № 1 – до 9 тижня, № 2 – до 19 тижня.

Студент має право один раз перескласти контрольну роботу з можливістю отримати не більше 80% балів, призначених за роботу. Термін перескладання визначає викладач.

За відсутності студента з поважних причин перездача КР здійснюється відповідно до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу» від 1 жовтня 2010 року.

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59
Зараховано / Passed	60-100
Не зараховано / Failed	0-59

8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій і практичних занять

IV семестр

№ п/п	**Назва лекції**	**Кількість годин**		
		лекції	**семінари**	**С/Р**
	Частина 1 **«Аксіоматика теорії ймовірностей та поняття дискретної випадкової величини»**			
1	Вступ. Етапи розвитку теорії ймовірності	2	2	6
2	Стох. експеримент. Простір елементарних подій. Операції над подіями. Скінченна та зліченна ймовірносні схеми	2	2	6
3	Геометрична ймовірність. Аксіоматика теорії ймовірностей	2	2	6
4	Умовні ймовірності. Незалежні події. Формула повної ймовірності. Формула Байєса	2	2	6
4	Дискретні випадкові величини.	2	2	4
6	Дискретні випадкові величини. (продовження)	2	2	4
7	Схема незалежних випробувань Бернуллі	2	2	4
8	Схема незалежних випробувань Бернуллі (продовження)	2	2	4
9	Генератриси цілочисельних випадкових величин	2	2	4
10	Гіллясті процеси	2	1	4
	Контрольна робота 1		1	
	Частина 2 **«Випадкові величини загального типу. Випадкові вектори. Граничні теореми»**			
11	Випадкові величини загального типу.	2	2	4
12	Випадкові величини загального типу (продовження)	2	2	6
13	Випадкові величини загального типу (продовження)	2	2	4
14	Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок)	2	2	4
15	Сумісний розподіл випадкових величин	2	2	4
16	Функції від випадкових векторів	2	2	4
17	Характеристики залежності випадкових величин	2	2	6
18	Умовний розподіл ймовірностей та умовне математичне сподівання	2	2	6

19	Характеристичні функції	2	2	4
20	Типи збіжності випадкових величин. Великі граничні теореми теорії ймовірностей.	2	1	6
	Контрольна робота 2		1	
	ВСЬОГО	**40**	**40**	**96**

Загальний обсяг 180 *год.,* в тому числі:
Лекцій – **40** *год.*
Семінари – **40** *год.*
Самостійна робота – **96** *год.*
Консультацій – **4** *год.*

V семестр

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні	Самостійна робота
	Частина 3 **«Основи теорії випадкових процесів. Ланцюги Маркова»**			
1	Моделювання випадкових величин	2	2	5
2	Базові поняття теорії випадкових процесів. Пуасонівський та Вінерівський процеси	2	2	5
3	Ланцюги Маркова з дискретним часом. Класифікація станів	2	2	5
4	Ланцюги Маркова з дискретним часом. Ергодичний та стаціонарний розподіл	2	2	5
5	Ланцюги Маркова з неперервним часом.	2	1	5
6	Ланцюги Маркова з неперервним часом. Процеси загибелі та народження.	2	1	5
Контрольна робота 3			2	
	Частина 4 **«Вступ до статистики. Статистичне оцінювання і перевірка статистичних гіпотез»**			
7	Математична статистика: вступ	2	1	1
8	Основи вибіркової теорії. Основні задачі математичної статистики	2	1	2
9	Точкове оцінювання параметрів. Властивості оцінок. Незсуненість та консистентність	2	2	5
10	Точкове оцінювання параметрів. Середньоквадратичний підхід. Ефективні оцінки	2	2	5
11	Точкове оцінювання параметрів. Достатні статистики	2	2	5
12	Методи побудови точкових оцінок	2	2	5
13	Методи побудови точкових оцінок (продовження)	2	2	5
14	Інтервальне оцінювання параметрів	2	2	5
15	Перевірка статистичних гіпотез. Гіпотези про вид розподілу	2	2	5
16	Перевірка статистичних гіпотез. Гіпотези про однорідність	2	2	5
17	Перевірка статистичних гіпотез. Гіпотези про незалежність	2	2	5
Контрольна робота 4			2	
Всього		**34**	**34**	**78**

Загальний обсяг ***150*** *_год.,* в тому числі:

Лекцій – **34** *год.*
Практичні заняття – **34** *год.*
Самостійна робота **-** **78** *год.*
Консультацій – **4** *год.*

9. Рекомендовані джерела

Основні:

1. Братійчук М.С., Чечельницький О.А. Лекції зі стохастики. Ймовірність. Статистика. Випадкові процеси / М.С.Братійчук, О.А. Чечельницький.— Київ: електронна публікація на сайті факультету, 2021.-- 395 с.
2. Лебєдєв Є.О., Шарапов М.М. Курс лекцій з теорії ймовірностей. – К.: Норіта-плюс, 2007. – 168 с.
3. Є.О. Лебєдєв, Г.В. Лівінська, І.В. Розора, М.М. Шарапов, Математична статистика // ВПЦ "Київський університет", 2016.
4. Шарапов М.М., Розора І.В., Лівінська Г.В., Пономарьов В.Д. "Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики". Навчальний посібник; – Київ: 2023. – 326 с. https://csc.knu.ua/media/filer_public/f4/31/f431177a-99c1-48af-ae68399c2c28b6bd/main_2023.pdf.
5. І. Гіхман, А. Скороход, М. Ядренко "Теорія ймовірностей та математична статистика".
6. А.В. Скороход "Елементи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів", К. 1975.
7. Є.О.Лебєдєв, О.А.Чечельницький, М.М.Шарапов, М.С.Братійчук Збірник задач з теорії ймовірностей, КНУ ім. Т. Шевченка, 2006.
8. Карташов М.В. Ймовірність, процеси, статистика. - К.: ВПЦ Київський університет, 2006. - 494 с.
9. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика - К.: Професіонал, 2007. - 560 с.

Додаткові:

10. В.Н. Турчин «Теорія ймовірностей та математична статистика», Дніпропетровск, Вид. ДНУ, 2008.
11. F.M. Dekking, C. Kraaikamp, H.P. Lopuhaä, L.E. Meester «A Modern Introduction to Probability and Statistics. Understanding Why and How», Springer, 2005.
12. Р.Є. Майборода "Комп'ютерна статистика -- професійний старт", 2018